

ELLIPSZISLEMEZ MÁSODFAJÚ RÖGZÍTÉSE*

Hajdu Endre

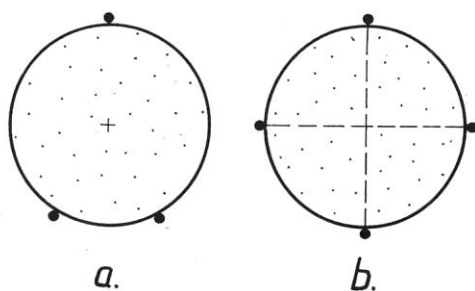
Egy pénzérmének vagy egyéb lemezidomnak saját síkjában történő elmozgathatósága meggátolható oly módon, hogy a lemez pereme mentén, alkalmasan megválasztott helyeken szögeket verünk be. Ha a lemezidomnak konvex síkidomot, a szögeknek egy-egy fix pontot – rögzítő pontokat – feleltetünk meg, akkor a síkidom rögzítésével kapcsolatban különféle problémák vethetők fel, melyek vizsgálata céljából néhány fogalom bevezetése szükséges.

A rögzíteni kívánt konvex síkidomot a továbbiakban lemeznek mondjuk, határvonala a perem, a perem mentén elhelyezett rögzítő pontok összessége a rögzítő rendszer. Nem kellő számú vagy nem megfelelő módon elhelyezett rögzítő pontok a lemez mozgását csupán korlátozzák, gátolják, vagyis a rögzítő rendszer ilyen esetben nem hatásos. Testek rögzítése is történhet alkalmasan elhelyezett pontrendszerrel, de a továbbiakban csak síkbeli alakzatok rögzítéséről lesz szó.

Ismeretes, hogy a síkbeli elmozgatások eltolások vagy elforgatások. A két lehetséges elmozgatásnak megfelelően a síkbeli rögzítéseket két csoportra oszthatjuk: elsőfajú rögzítésről beszélünk, ha a rögzítő rendszer csupán az eltolásait akadályozza meg a lemeznek.

Másodfajú a rögzítés, ha az elforgatásait zárja ki a lemeznek. Teljes rögzítésről beszélünk, ha a lemez eltolása és elforgatása egyaránt gátolva van.

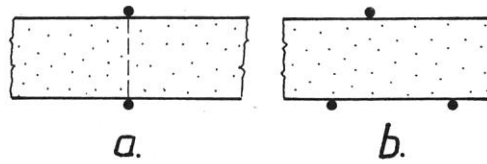
A rögzítésekkel kapcsolatban alapvető a primitív rögzítő rendszer fogalma; mely hatásos a szóban forgó rögzítés típus tekintetében, de nincs egyetlen fölösleges pontja sem, vagyis bármelyik pontját elhagyva, a lemez valamilyen módon elmozgathatóvá válik. Adott lemeznek több, különböző elemszámú, de azonos fajú rögzítést biztosító rögzítésmódja is lehet. Egy körlemez elsőfajú primitív rögzítő rendszerének elemszáma például 3 vagy 4 (1. ábra).



1. ábra

Egy sáv másodfajú primitív rögzítő rendszerének elemszáma 2 vagy 3 (2. ábra).

*Az ELLIPSZISLEMEZ MÁSODRENDŰ RÖGZÍTÉSE című dolgozat javított változata



2. ábra

Megmutatható, hogy konvex síkidomok elsőfajú primitív rögzítő rendszere legfeljebb 4 elemű, ha a perem bármely pontjához csak egy érintő tartozik. Általában a primitív rögzítő rendszer maximális elemszámának meghatározása a nehezebb feladat egy alakzat rögzítése esetén. Az első két ábra azt is szemlélteti, hogy a két síkbeli rögzítés-típus egyike sem biztosítja a lemez teljes rögzítettségének; azaz egy elsőfajúan rögzített lemez esetleg még elforgatható (1. ábra) és egy másodfajúan rögzített lemez esetleg eltolható még (2. ábra).

A továbbiakban kizárólag a másodfajú rögzítés körébe tartozó feladatokról lesz szó.

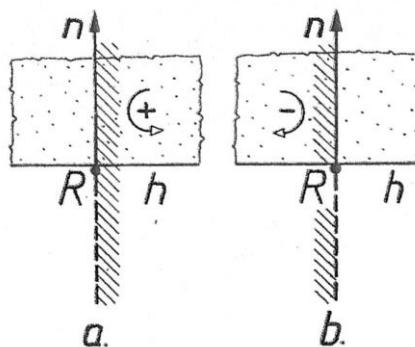
A másodfajú rögzítés alapfogalmai.

Egy síkbeli alakzat minden pillanatnyi forgó mozgása valamilyen forgásközéppont (forgás-középpont, a továbbiakban: centrum) körül megy végbe. Egy-egy centrum körül pozitív vagy negatív forgásiránynak megfelelően fordulhat el a rögzítendő lemez. A sík azon pontjai, melyek körül elforgatható a lemez – vagyis a szabad centrumok – alkotják a szabad centrumtartományt. Azok a pontok, melyek körül elforgatás nem lehetséges – vagyis a kizárt centrumok – alkotják a kizárt centrumtartományt.

A másodfajú rögzítés célja olyan rögzítő rendszer konstruálása, mely biztosítja, hogy a sík minden pontja kizárt centrum legyen. E feladat megoldása végett tisztázni kell egyetlen rögzítő pont esetén a szabad és kizárt centrumtartományok helyzetét, milyenségét, a perem jellegének függvényében.

Ha a rögzítő pont környezetében

- a). a perem egyenes (szakasz), a peremnek az R rögzítő pontot tartalmazó normálisa – vagyis az n támasznormális – a síkot két részre osztja (3. ábra). Az ábra a. részletén sraffozással jelölt félsík pontjai körül pozitív forgásirányban nem forgatható el a lemez, vagyis az n határegyenesű félsík pontjai alkotják a pozitív forgásirányú elforgatásból kizárt centrumtartományt (3. ábra).

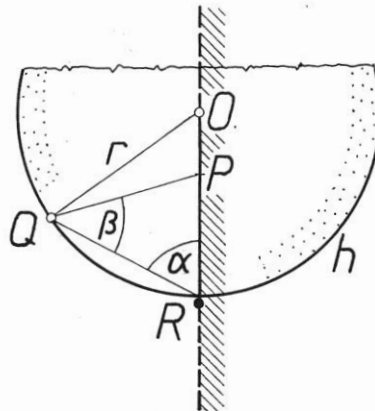


3. ábra

Nem tartozik a kizárt centrumtartományba a támasznormálisnak azon R kezdőpontú félegyenese, mely a perem h egyenese által elválasztott fésíkok közül a lemezt nem tartalmazóba esik. Ezt a tényt, vagyis, hogy az említett félegyenese pontjai nem kizárt centrumok, szaggatott vonal jelzi. Célszerű a támasznormálist irányított egyenesnek tekinteni, oly módon, hogy iránya a rögzítő ponttól a lemez felé mutasson. Ekkor a pozitív kizárt centrumtartomány a támasznormális irányába nézve jobbra esik.

A b. ábrarészlet a negatív forgásirányú elforgatás lehetőségéből kizárt pontok tartományát szemlélteti sraffozással. Ez a tartomány a támasznormálistól balra esik. A támasznormálisnak mindkét forgásirány tekintetében hatásos részét folytonos vonal, a hatástalan részét szaggatott vonal jelzi.

- b). A perem körív. Ha a rögzítő pont környezetében a perem O középpontú, r sugarú körív (4. ábra), akkor a támasznormális által elválasztott fésíkok alkotják ismét a kizárt, ill. a szabad centrumtartományokat. Azonban most a támasznormálisnak csupán az O -tól R -ig terjedő szakasza tartozik a – mindkét forgásirány tekintetében – kizárt centrumtartományhoz, az O pont kivételével.

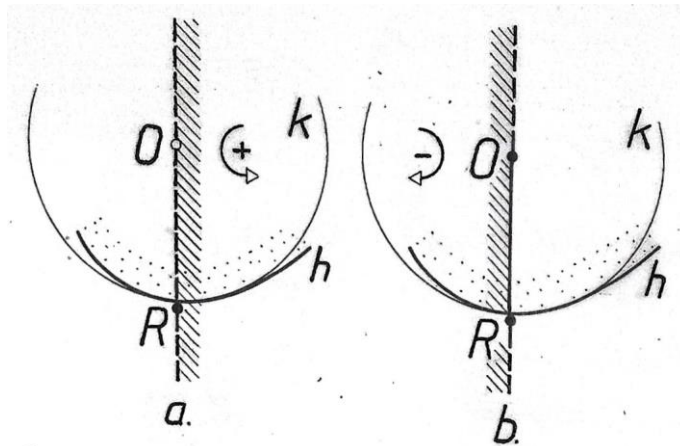


4. ábra

Ugyanis ha P az RO szakasz belső pontja, Q a perem tetszőleges, R -től különböző pontja, akkor $\beta < \alpha$, ezért a PQR háromszögben az R csúccsal szemben lévő oldal nagyobb, mint a Q -val szemben lévő, következésképp a lemez P körül nem forgatható el pozitív irányban úgy, hogy a PQ szakasz a PR' szakasszal fedésbe kerüljön, ha R' a körív R -rel szomszédos pontja. Az ábrán sraffozással jelölt fésík belső pontjai is kizárt centrumok. A negatív kizárt centrumtartomány ismét a pozitív kizárt centrumtartománynak a támasznormálisra vonatkozó tükörképe.

- c). A perem a rögzítő pont környezetében olyan h görbe, melynek R -hez tartozó pontjához létezik a görbét átmetsző simulókör (ha nem metszi át, akkor az eset azonos a körív peremnél látottal). Ekkor az 5. ábrán látható centrum-

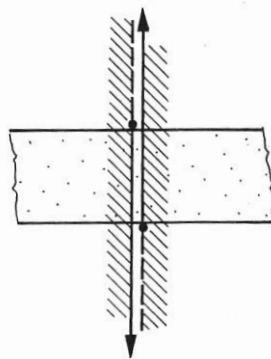
tartományok egymás tükörképei, az OR szakasz kivételével.



5. ábra

A másodfajú rögzítés feltételei

A sík összes pontjának, mint lehetséges forgáscentrumnak kizárása általában több módon is megvalósítható, amint már a 2. ábra is példázta. A kizárt centrumtartományok fogalmának ismeretében a 2. ábra magyarázata a következő: mivel most a támasznormálisok egybeesnek (a 6. ábrán a könnyebb érthetőség végett a támasznormálisok egymástól kissé eltolva láthatók), a korábban elmondottak értelmében a kizárt centrumtartományok lefedik a teljes síkot, tehát a lemez, vagyis a sáv másodfajú rögzítése megvalósul.

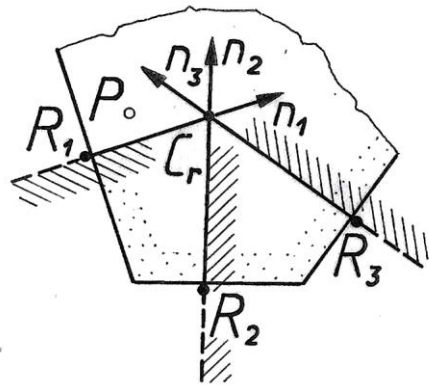


6. ábra

Az alakzatok szűk osztályának másodfajú rögzítése oldható meg csupán két rögzítő ponttal; lényegesen hatékonyabb a hárompontos rögzítés. A hárompontos rögzítés során három félsíkkal kell lefedni a teljes síkot, azaz kizárni minden lehetséges centrumot, ami csak akkor lehetséges, ha a félsíkok határ-egyenesei egy (a végesben vagy a végtelenben lévő) pontban metszik egymást. Ebből következik a hárompontos rögzítés első feltétele:

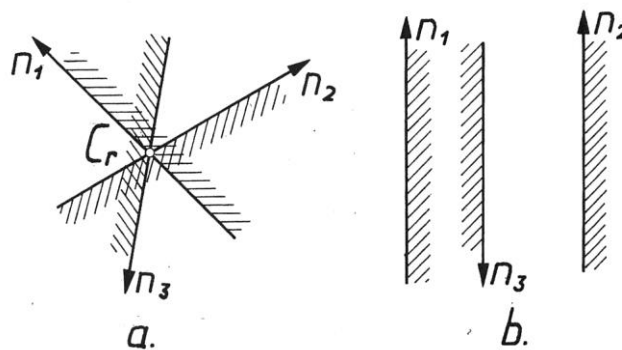
I. Feltétel: másodrendű rögzítés esetén a támasznormálisoknak egy – esetleg ideális – pontban kell metszeniük egymást.

A 7. ábra példát mutat arra, hogy az első feltétel nem elégséges feltétele a másodfajú rögzítésnek. Az egy pontban metsződő támasznormálisokkal határolt félsíkok (pozitív kizárt centrumtartományok) nem fedik le a síkot, a sík fedetlen részében lévő P pont körül a lemez elforgatható.



7. ábra

Ahhoz, hogy három félsík lefedje a teljes síkot, az is szükséges, hogy a három támasznormális közül bármelyik két félsík által fedetlenül hagyott síkrészt a harmadik támasznormális félsíkja lefedje. E kívánalmat fogalmazza meg a II. Feltétel: másodfajú, hárompontos rögzítés esetén bármely két azonos előjelű kizárt centrumtartomány által le nem fedett szögtartományt a harmadik azonos előjelű centrumtartománynak kell kizárnia; ez teljesül, ha a támasznormálisok által páronként bezárt hajlásszögek összege 360° . A végesben és a végtelenben lévő C_r metszéspont esetét szemlélteti a 8. ábra.

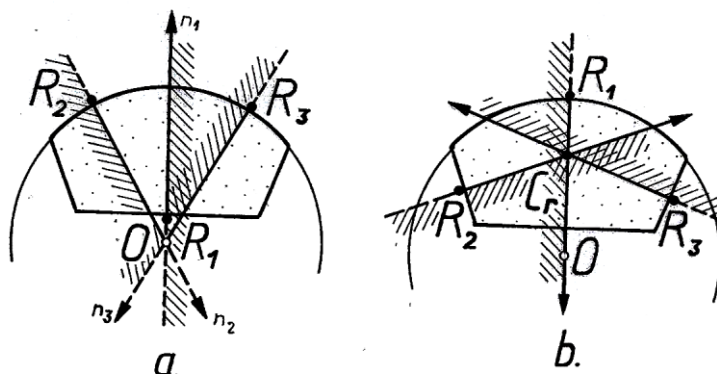


8. ábra

A 9. ábra arra mutat példát, hogy a fenti két feltétel teljesülése sem biztosítja minden esetben a lemez másodfajú rögzítettségének; a 9.a ábrán látható esetben a sík egyetlen pontja, az O pont nem tartozik egyetlen kizárt centrumtartományhoz sem, ezért nem hatásos a rögzítő rendszer, a támasznormálisok közös pontja nem rögzítési centrum.

A másodfajú, hárompontos rögzítés neve: centrális rögzítés, melynek III. Feltétele: hárompontos rögzítés esetén a C_r rögzítési centrumnak legalább két különböző előjelű kizárt centrumtartományhoz kell tartoznia.

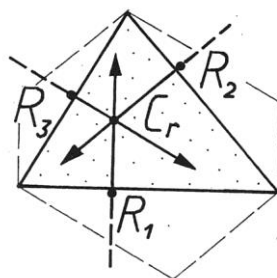
A 9.a ábra lemeze nincs rögzítve; a 9.b ábra esetében a C_r pontra a feltétel már teljesül, a lemez rögzítve van. A támasznormálisok összege 360° .



9. ábra

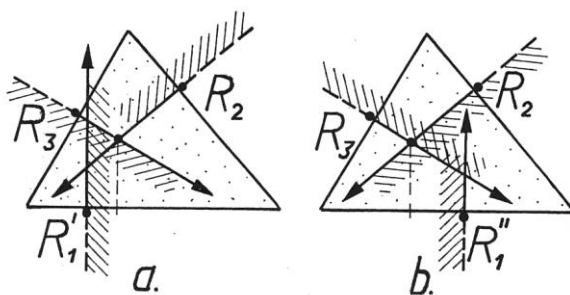
Háromszöglemez rögzítése

A rögzítési feltételek ismeretében egy háromszöglemez rögzítése történhet a 10. ábrán látható módon. A csúcspontokban az oldalakra állított merőlegesek általában hatszöget (derékszögű háromszög esetében téglalapot) határolnak; a hatszögön belül tetszőlegesen fölvehető a rögzítés C_r centruma, melynek a háromszög oldalaira vonatkozó talppontjaihoz kerülnek a rögzítő pontok.



10. ábra

A háromszöglemez négy pontos rögzítő rendszeréhez jutunk, ha a 10. ábra egyik, például az R_1 rögzítő pontját olyan két rögzítő ponttal helyettesítjük, melyek az eltávolított R_1 helyét közre fogják (11. ábra).



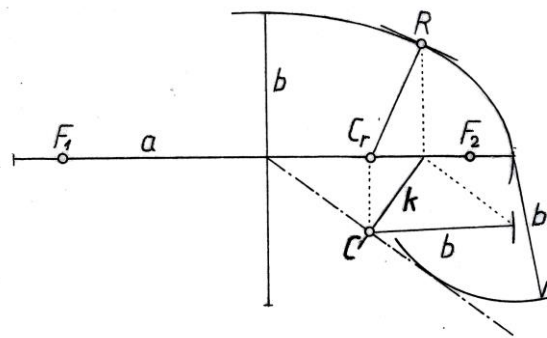
11. ábra

Az a. ábrarészlet szerint R'_1 az R_2 és R_3 rögzítő pontok kizárt pozitív centrumtartományai által le nem fedett szögtartomány lefedését biztosítja, míg R''_1 a

negatív kizárt centrumtartományokét.

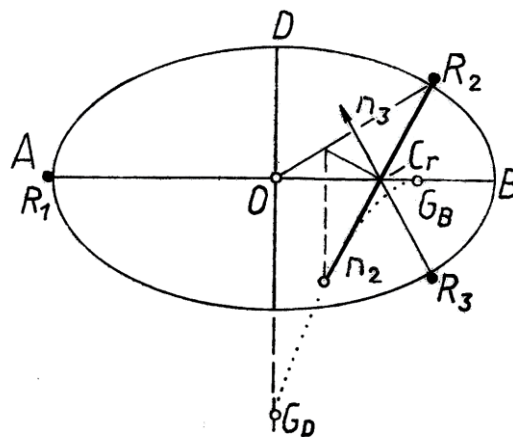
Ellipszislemez rögzítése

Az ellipszislemez hárompontos rögzítésének csak azon eseteivel foglalkozunk, amikor a rögzítési centrum az ellipszis valamelyik tengelyén van (12. ábra). Ha adva van a rögzítési centrum, akkor ahhoz, hogy kijelöljük a megfelelő rögzítő pontokat, meg kell szerkeszteni az ellipszisnek a C_r ponthoz illeszkedő normálisait. Ennek egyik legegyszerűbb módja az, hogy az a, b adatokkal bíró ellipszist egy b sugarú henger metszetének tekintjük. Felfoghatjuk azonban az ellipszist a henger egy olyan k körének ferde vetületeként is, melynek középpontja az ábrán vastag betűvel jelzett C (az ábra alsó része a henger tengelyét tartalmazó, s a papír síkjára merőleges síkjára vonatkozó vetülete) az említett kört is vastag betű jelzi: k . A szerkesztés további lépései leolvashatók az ábráról. Részletesebb magyarázat mellőzhetőnek tűnik, mert nem lényeges, hogy éppen a 12. ábra szerint határozzuk meg a C_r - hez illeszkedő normálisokat.



12. ábra

Az R_1 rögzítő pont kijelölése után, a normálisok meghatározzák az R_2 és R_3 rögzítő pontot is. Az első két rögzítési feltétel teljesülése nyilvánvaló a 13. ábrán, a harmadik rögzítési feltétel is teljesül, mert C_r az R_2 negatív kizárt centrumtartományában van, míg R_3 a pozitív centrumtartományában (itt nincs vastagítással jelölve a kizártság).



13. ábra

Az ábra feltűnteti az R_2 - höz tartozó görbületi középpont szerkesztését is, valamint a B, D görbe ívhez tartozó görbületi középpontokat.

Ha $C_r \rightarrow O$, akkor $R_2 \rightarrow D$, ha pedig $C_r \rightarrow G_B$, akkor $R_2 \rightarrow B$.

A kistengely belső vagy végpontjához is kerülhet a rögzítő pont, ilyen esetben a másik két rögzítő pont helyzete is változik a görbén.

Irodalom:

[1] – ***Tomor Benedek:*** Konvex alakzatok egy rögzítési problémája.

Matematikai lapok 1963. 120-123.

[2] – ***L. Fejes Tóth:*** On primitive polyhedra. Acta Math. 1962. 379-382.

[3] – ***Hajdu Endre:*** Konvex sokszöglemezek elsőfajú rögzítése.

Dimenziók Matematikai Közlemények 2022. 81-86.

Sopron, 2015. 07. 20.

Átdolgozva:

2023. 10. 04.